ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

Fondée en 1949 — Reconnue par l'État
Diplôme visé par le Ministère de l'Éducation Nationale
1, Rue Bougainville — 75007 PARIS
TÉL. : 45 51 32 89

CONCOURS D'ADMISSION

SESSION DE 1987

MATHÉMATIQUES - 1ÈRE ÉPREUVE
(Voie Economique)

DURÉE 4 H - COEFFICIENT 4

Exercice I

On considère les matrices carrées d'ordre 4 suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour chaque matrice carrée d'ordre 4, à coefficients réels, on considère l'application Φ_M qui à chaque polynôme P tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$ associe la matrice

$$\Phi_M(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k$$

(M^0 désignant la matrice unité).

1°) Vérifier que $AB = BA$. Calculer A^n et B^n pour tout entier naturel n.

2°) Calculer $\Phi_A(P_1)$ et $\Phi_B(P_1)$ dans le cas $P_1(X) = 1 + X^2$.

3°) Pour chaque matrice carrée d'ordre 4, on considère l'équation $\Phi_M(P) = 0$.
S'il existe des solutions non nulles, on appellera solution minimale P_0 le polynôme de degré minimal et unitaire (c'est-à-dire tel que $P_0(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$) vérifiant $\Phi_M(P_0) = 0$
Vérifier que $P_0(X) = (X-2)(X-3)$ lorsque $M = A$.

4°) On pose $S = A + B$

a) Calculer S^n pour tout entier naturel.

b) En déduire $\Phi_S(P)$ pour tout polynôme P.
On explicitera les coefficients de la matrice $\Phi_S(P)$ à l'aide de valeurs particulières prises par P et ses dérivées : $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P'(\alpha)$, $P'(\beta)$, $P''(\alpha)$... où α et β sont deux nombres réels à déterminer.

c) Montrer que $\Phi_S(P) = 0$ si et seulement si P est tel que :
$P(X) = (X-3)(X-2)^3 Q(X)$ où $Q(X)$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

d) En déduire alors la solution minimale P_0 définie dans la question 3°) pour la matrice $M = S$.

Exercice II

Pour tout nombre réel k non nul et différent de 1, on considère la fonction :

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R}^{-*} \to \mathbb{R} \\ x \to x^{x^k} = e^{x^k \ln x} \end{cases}$$

1°) Etudier la continuité de f_k à droite de $x = 0$.
En déduire que f_k peut être prolongée par continuité sur $[0, +\infty[$; on notera $\widetilde{f_k}$ la fonction f_k ainsi prolongée.

2°) Etudier la dérivabilité de $\widetilde{f_k}$ à droite de $x = 0$.

3°) Etudier les variations des fonctions $\widetilde{f_k}$.

4°) Construire les diverses formes des courbes (C_k) représentatives de ces fonctions $\widetilde{f_k}$.

Exercice III

Soix X une variable aléatoire réelle associée à l'intervalle de temps séparant deux arrivées successives d'un événement.
On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre (θ, σ) (où θ et σ sont deux nombres réels strictement positifs) si X est absolument continue et admet pour densité la fonction $f_{\theta,\sigma}$ définie par :

$$\begin{cases} f_{\theta,\sigma}(x) = 0 & \text{si } x < \theta \\ f_{\theta,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)} & \text{si } x \geqslant \theta. \end{cases}$$

1°) Déterminer la fonction de répartition $F_{\theta,\sigma}$ de X.

2°) Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X).

Tournez la page S. V. P.

3°) a) On observe un couple de variables aléatoires (X, Y) indépendantes et de loi exponentielle (θ, σ). Quelle est la loi de la variable aléatoire $Z = \inf(X, Y)$? Calculer E(Z) et V(Z).

b) Plus généralement, on observe les intervalles séparant des arrivées successives et on appelle (X_n) la suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de loi exponentielle de paramètre (θ, σ). Quelle est la loi de la variable aléatoire associée au plus petit des n premiers intervalles : $Z_n = \inf(X_1, X_2, ..., X_n)$?
Vérifier que $E(Z_n) = \theta + \sigma/n$ et $V(Z_n) = \sigma^2/n^2$.

Exercice IV (Les parties A et B sont indépendantes).

Une fonction numérique strictement positive f représente une fonction de demande d'un consommateur si elle exprime le lien entre les quantités demandées "y" et le prix "x" d'un bien : $y = f(x)$.

Partie A :

Soit x un nombre réel strictement positif, on définit l'élasticité $\epsilon(y/x)$ de la demande d'un bien par rapport à son prix, par :

$\epsilon(y/x) = \dfrac{x\, f'(x)}{f(x)}$ où f' désigne la dérivée de f par rapport à x.

1°) Si c est un nombre réel strictement positif et n un entier naturel non nul, calculer l'élasticité $\epsilon(y/x)$ dans les cas suivants :

a) $y = f(x) = c\, x^n$

b) $y = f(x) = c\, x^{-n}$

2°) Si f et g sont deux fonctions numériques strictement positives telles que $y = f(x)$, $z = g(x)$; calculer $\epsilon(yz/x)$ en fonction de $\epsilon(y/x)$ et $\epsilon(z/x)$.

3°) On pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$ où ln désigne le logarithme népérien. Exprimer $\epsilon(y/x)$ en fonction de la dérivée de Y par rapport à X.

Partie B :

Une entreprise fixe le prix x d'un certain produit dont les quantités demandées sont représentées par la variable y.
En supposant la demande totalement satisfaite, on définit les fonctions suivantes de la variable y :

- Fonction de coût total : C(y)
- Fonction de coût moyen : $C_m(y) = \dfrac{C(y)}{y}$
- Fonction de coût marginal : $C_M(y) = C'(y)$ où C' désigne la dérivée de C par rapport à y.

I. Montrer que la courbe représentative du coût marginal coupe la courbe représentative du coût moyen en son minimum.

II. On suppose désormais que $C(y) = \dfrac{y^3}{40} - 3\,y^2 + 150\,y + 1875$.

1°) a) Etudier succinctement les variations de la fonction C'_m sur $\mathbb{R}^{-*}$.

b) En déduire l'existence d'un nombre réel α unique vérifiant $C'_m(\alpha) = 0$
Vérifier l'encadrement $68{,}08 < \alpha < 68{,}09$.

c) Etudier alors les variations des fonctions C_M et C_m.

d) Vérifier graphiquement le résultat de la question I.

2°) En supposant de plus que la fonction de demande est de la forme :

$y = f(x) = \dfrac{1000}{x}$; on définit une fonction bénéfice B(x) par :

$$B(x) = 100\, f(x) - C(f(x))$$

a) Exprimer B en fonction de x.

b) Etudier la fonction B(x) et tracer sa courbe représentative.

c) Pour quelle valeur de x ce bénéfice est-il maximal ?

d) Déterminer l'intervalle de prix à l'intérieur duquel l'entreprise fait du bénéfice ?